Eike Bick / Uwe Dörr / Todor Dobrikov

Risikomanagement mit Augenmaß: Wie man die **Ausfallwahrscheinlichkeit** korrekt justiert

Die Schaffung regulatorischer Rahmenbedingungen für institutseigene Schätzungen der kreditrisikobezogenen 1-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeit von Kunden beziehungsweise Verträgen (die „probability of default" oder kurz PD) hat über die letzten Jahre in den meisten Banken zu der Entwicklung von Ratingverfahren geführt, die auf der Basis von bekannten Eingangsdaten (den Risikofaktoren) Scores errechnen und daraus Prognosen für die Ausfallwahrscheinlichkeit PD ableiten. Dabei wird in der Praxis meist unterschieden zwischen

– der Entwicklung eines trennscharfen Verfahrens (Score-Entwicklung), das die Kunden beziehungsweise Verträge hinsichtlich ihrer Bonität möglichst korrekt anordnet, ohne aber eine Aussage zu der absoluten Ausfallwahrscheinlichkeit zu treffen und

– der PD-Kalibrierung, die den Berechnungsergebnissen des Verfahrens (meist Scores genannt) eine absolute Ausfallwahrscheinlichkeit zuordnet.

Gründe für die Trennung von Score-Entwicklung und Kalibrierung

Aus theoretischer Sicht ist eine solche Zweiteilung nicht zwangsläufig erforderlich – ist beispielsweise die Datengrundlage ausreichend, statistische Verfahren wie die oft am Markt eingesetzte logistische Regression für die Score-Entwicklung anzuwenden, ergibt sich eine PD-Schätzung direkt aus den Regressionsannahmen, sodass eine separate PD-Kalibrierung nicht notwendig zu sein scheint. Trotzdem sprechen zahlreiche praktische Gründe für eine solche Zweiteilung. Viele dieser Gründe sind prozessualer Natur, aber auch aus methodischer Sicht erscheint die Trennung von Score-Entwicklung und Kalibrierung vorteilhaft, insbesondere dann, wenn die durch die Score-Entwicklung (beispielsweise durch eine logistische Regression) implizierten PDs systematisch zu niedrig sind, sodass eine Korrektur durch den zweiten Schritt der PD-Kalibrierung notwendig wird.

In der Entwicklungspraxis tritt eine wie oben beschriebene Situation insbesondere dann auf, wenn die auf Basis der historischen Ausfallraten geschätzte PD mit einem Konservativitätsaufschlag versehen werden soll. Meist ist die Notwendigkeit, Konservativitätsaufschläge auf die PD-Schätzungen vorzunehmen, bereits durch aufsichtliche Randbedingungen gegeben: Institute, die im Rahmen des IRBA-Ansatzes eigene PD-Schätzungen vornehmen, sind nämlich verpflichtet, Unsicherheiten bei diesen Schätzungen (zum Beispiel aufgrund von Datenmängeln, statistischen Standardfehlern, ungenauigkeitsbehafteten Expertenschätzern) durch einen geeigneten Konservativitätsaufschlag auf die PDs Rechnung zu tragen. Diese Konservativitätsforderung wird oft in Form eines Aufschlags auf die mittlere Portfolio-PD erfüllt.

Dr. Uwe Dörr, Partner, Dr. Eike Bick, Senior Manager, und Todor Dobrikov, Manager, alle d-fine GmbH, Frankfurt am Main

Ohne jede Frage hat das Risikomanagement der Banken intern wie auch in der öffentlichen Wahrnehmung in den vergangenen Jahren enorm an Stellenwert gewonnen. Die einschlägigen Spezialisten für diese Dinge sind am Markt gefragt. Sie haben mit ihren Berechnungen in den Instituten maßgeblichen Einfluss auf die Steuerung gewonnen. Bei der Auswahl der geeigneten Verfahren zur Ermittlung von Ausfallwahrscheinlichkeiten für Kunden oder Portfolios sehen die Autoren Raum für eine Optimierung. Ihren Überlegungen nach ist es keineswegs immer sinnvoll, vergleichsweise aufwendige Verfahren anzuwenden, sondern die Kunst besteht darin, die für die jeweiligen Fragestellungen richtigen Methoden auszuwählen. Sie plädieren dabei für eine kluge Abwägung im Lichte der notwendigen Genauigkeit für das relevante Portfolio und der Höhe des Entwicklungsaufwandes für das Verfahren. (Red.)

Ist beispielsweise ein Portfolio mit einer Ausfallquote von fünf Prozent durch die Score-Entwicklung implizit punktgenau auf eine mittlere PD von fünf Prozent kalibriert, könnte ein Institut auf Basis einer Analyse der Schätzunsicherheiten zu der Schlussfolgerung kommen, dass ein Aufschlag von 0,5 Prozent auf die mittlere Portfolio-PD der Schätzunsicherheit geeignet Rechnung trägt. Gegenüber der angenommenen konservativen mittleren Portfolio-PD von 5,5 Prozent sind die durch die Score-Entwicklung implizierten PDs (die im Mittel eine Portfolio-PD von fünf Prozent ergeben) systematisch zu niedrig und müssen durch einen Konservativitätsaufschlag nach oben korrigiert werden.

Konservativitätsaufschläge für die einzelnen Kunden gesucht

In diesem Zusammenhang stellt sich nun folgende Frage – wie hoch sind die Konservativitätsaufschläge der PDs für die einzelnen Kunden beziehungsweise Verträge zu wählen, wenn die folgenden Größen bekannt sind:

– die individuellen PDs der einzelnen Kunden beziehungsweise Verträge vor Anwendung von Konservativitätsaufschlägen,

– die durchschnittliche Portfolio-PD vor Anwendung von Konservativitätsaufschlägen und

– die angestrebte durchschnittliche Portfolio-PD nach Anwendung von Konservativitätsaufschlägen.

Die Berechnungsvorschrift, um aus diesen Eingangsgrößen die „individuelle PD" nach Konservativitätsaufschlag zu ermitteln, wird im Folgenden „Transformation der individuellen PDs" genannt.

Zur Berechnung von Konservativitätsaufschlägen

In der Folge werden zwei Methoden vorgestellt, die diese Frage beantworten – zum einen ist das eine einfache Skalierungs-Methode, die leicht zu implementieren ist, aber insbesondere bei der Transformation hoher PDs Ungenauigkeiten aufweist, und zum anderen eine genauere Methode, die allerdings einen höheren Entwicklungsaufwand erfordert und höhere Ansprüche an die verfügbare Datenbasis stellt. Die Auswahl einer geeigneten Methode wird dann durch eine Abwägung der Genauigkeit der Methode für das konkret vorliegende Portfolio und des Entwicklungsaufwands bestimmt sein. Zunächst wird auf die beiden Methoden eingegangen. Ihre verschiedenen Eigenschaften und Grenzen werden dann anhand von Rechenbeispielen illustriert und abschließend eine Zusammenfassung der Ergebnisse geliefert. (Eine mathematische Herleitung der verwendeten Formeln kann auf der Homepage des Verlages kostenfrei abgerufen werden – siehe den Hinweis am Ende des Beitrags. – Red.)

Die folgenden Begrifflichkeiten werden vereinbart, um die weitere Diskussion zu vereinfachen.

– Unter der „individuellen PD" ist die PD zu verstehen, die den einzelnen Kunden vor Anwendung von Konservativitätsaufschlägen zugewiesen wird. Dies kann zum Beispiel die durch die Score-Entwicklung implizierte PD sein. Die individuellen PDs werden als bekannt angenommen.

– Die „Portfolio-PD" ist die mittlere PD, die auf dem Portfolio vor Anwendung von Konservativitätsaufschlägen eingestellt ist. Sie ergibt sich als Mittelwert der individuellen PDs. Die Portfolio-PD ist eine Funktion der individuellen PDs und wird daher ebenfalls als bekannt angesehen.

– Die „Ziel-PD" ist die mittlere PD, die sich auf dem Portfolio nach Anwendung von Konservativitätsaufschlägen ergibt. In den hier diskutierten Fällen ist die Ziel-PD ungleich der Portfolio-PD, aber ebenfalls eine bekannte Größe. Aus dieser Ungleichheit ergibt sich der Bedarf, Konservativitätsaufschläge für die individuellen PDs zu bestimmen.

– Die „transformierte individuelle PD" ist die PD, die einem einzelnen Kunden nach Anwendung von Konservativitätsaufschlägen zugewiesen wird. Im Portfolio-Mittel ergeben diese PDs die Ziel-PD. Während die Ziel-PD bekannt ist, sind die transformierten individuellen PDs unbekannte Größen. Ziel wird es sein, eine geeignete Vorschrift für die Berechnung der transformierten individuellen PDs zu finden, für die das Portfolio-Mittel der transformierten individuellen PDs der Ziel-PD entspricht.

Nun werden zwei Methoden vorgestellt, die es erlauben, die Konservativitätsaufschläge zu ermitteln.

Methode 1: Lineare Skalierung

Die einfachere Methode, die lineare Skalierung, besteht darin, alle individuellen PDs mit einem fixen Faktor *F* zu multiplizieren, der sich als Quotient der Ziel-PD und der Portfolio-PD ergibt. Im Eingangsbeispiel, in dem ein Portfolio mit einer Portfolio-PD von 5 Prozent vorliegt, für das ein Konservativitätsaufschlag von 0,5 Prozent auf Portfolio-Ebene angemessen erscheint, ist der Faktor *F* gegeben durch

$$F = \frac{5{,}5\%}{5\%} = 1{,}1$$

Ein Kunde mit einer individuellen PD von zwei Prozent erhielte dann eine transformierte individuelle PD von 2 Prozent x 1,1 = 2,2 Prozent. Für die PD dieses Kunden ergäbe sich daher einen Konservativitätsaufschlag von 0,2 Prozent.

Ein wesentlicher Nachteil dieser Methode ist, dass sie dazu neigt, die Konservativitätsaufschläge für Kunden mit großer PD zu überschätzen. Besonders deutlich wird dies in Extrembeispielen – ein Kunde mit einer individuellen PD von 60 Prozent erhielte mit einem Faktor $F = 2$ rechnerisch eine transformierte individuelle PD von 120 Prozent. Aber auch in praxisnäheren Konstellationen sind die Konservativitätsaufschläge für bereits hohe PDs bei Anwendung dieser Methode zu hoch – grundsätzlich ist zu erwarten, dass die Konservativitätsaufschläge mit zunehmender PD abnehmen (also nicht linear skaliert werden). Die in der Folge vorgestellte Methode besitzt diese erwünschte Eigenschaft.

Dennoch kann die lineare Skalierung für Portfolios mit nicht zu hohen PDs und nicht zu hohen Konservativitätsaufschlägen durchaus eine gute Näherung für genauere Berechnungsvorschriften sein, insbesondere, weil die Methode ein Minimum an Eingangsdaten benötigt und daher sehr robust ist. Im praktischen Einsatz ist hierbei die berechnete PD künstlich durch 100 Prozent zu limitieren. Die Güte der Methode 1 ist für das vorliegende Portfolio im Einzelfall zu prüfen.

Methode 2: Numerische nicht-lineare Skalierung

Diese Methode beruht auf einem Gedankenexperiment, das auf einer Betrachtung der Zahl der ausgefallenen und nicht-ausgefallenen Kunden je (klein gewähltem) Score-Bereich beruht. Hierbei wird angenommen, dass eine Erhöhung der Portfolio-PD dadurch bewirkt wird, dass je Score-Bereich eine gewisse Zahl der in diesem Score-Bereich liegenden nicht-ausgefallenen Kunden ausfällt, und dass die Summe der zusätzlich ausfallenden Kunden schließlich zu einer Erhöhung der Ausfallquote auf die Ziel-PD führt. Da diese Zahl der in einem gegebenen Score-Bereich liegenden zusätzlich ausfallenden Kunden umso größer sein sollte, je höher die PD der Kunden in dem Score-Bereich ist und je mehr nicht-ausgefallene Kunden in dem Score-Bereich liegen, wird in der Methode 2 unterstellt, dass die Zahl der in einem Score-Bereich zusätzlich ausfallenden Kunden proportional zur PD und zu der Zahl der nicht-ausgefallenen Kunden in diesem Score-Bereich ist.

Da unter diesen Annahmen nur diejenigen Kunden zusätzlich ausfallen können, die auch tatsächlich im Portfolio enthalten sind, können die auf Basis dieses Gedankenexperiments gewonnenen PDs nicht höher als 100 Prozent werden. Hierdurch entfällt der Hauptnachteil der Skalierungsmethode – in der Methode 2 ergeben sich in natürlicher Weise transformierte PDs, die nach oben durch 100 Prozent beschränkt sind.

Der Vorteil allgemeinerer Anwendbarkeit dieser Methode ist allerdings dadurch erkauft, dass sich hier die transformierte individuelle PD nicht als direkte Funktion der Eingangsgrößen individuelle PD, Portfolio-PD und Ziel-PD ergibt, sondern eine numerische Optimierung eines Parameters (nämlich der Proportionalitätskonstanten, durch die sich aus der PD und der Zahl der nicht-ausgefallenen Kunden je gegebenem Score-Bereich die Zahl der zusätzlich ausfallenden Kunden in diesem Score-Bereich ergibt) vorgenommen werden muss. Dies erhöht den Entwicklungsaufwand dieser Methode. Ob die erhöhte Genauigkeit der numerischen nicht-linearen Skalierung den Mehraufwand rechtfertigt, muss wiederum im Einzelfall entschieden werden.

Um einen besseren Einblick in die Eigenschaften und Grenzen der verschiedenen Methoden zu erhalten, werden sie im folgenden Abschnitt durch eine Reihe von Beispielrechnungen illustriert.

Rechenbeispiele

Die Eigenschaften der zwei Methoden werden anhand verschiedener Testportfolios illustriert, die möglichst viele Anwendungsbereiche abdecken. Dabei werden Testportfolios gewählt, deren beobachtete Ausfallquoten beziehungsweise Portfolio-PDs in der Praxis auftretende Situationen abdecken und zudem zur Illustration ein Beispiel mit sehr hoher Ausfallquote:

Testportfolio 1:
Ausfallquote (Portfolio-PD) = 3 Prozent. Typisch für Unternehmens- und KMU-Portfolios (KMU = kleine und mittlere Unternehmen) sowie für risikoarme Retail-Portfolios (zum Beispiel Baufis).

Testportfolio 2:
Ausfallquote (Portfolio-PD) = 6 Prozent. Typisch für risikoreichere Retail-Portfolios (zum Beispiel Konsumentenkredite oder gewerbliches Retail-Geschäft).

Testportfolio 3:
Ausfallquote (Portfolio-PD) = 10 Prozent. Beispiel für Portfolios mit hoher Ausfallrate, wie sie für Emerging Markets auftreten kann.

Testportfolio 4:
Ausfallquote (Portfolio-PD) = 25 Prozent. Illustratives Beispiel für Portfolios mit einer sehr hohen Ausfallrate.

In diesem Abschnitt werden relative Konservativitätsaufschläge ausgewiesen, die als Prozentsätze der Portfolio-PD angegeben werden, das heißt, ein 10-Prozent-

Abbildung 1: Relative Abweichungen zwischen mittlerer transformierter individueller PD und Ziel-PD (in Prozent)

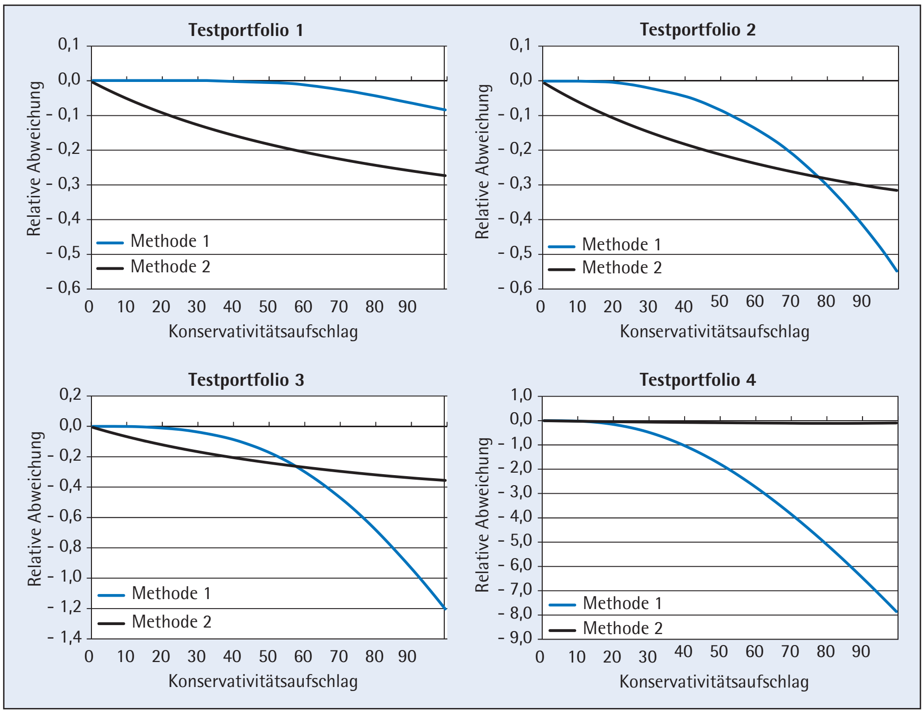


Tabelle: Relative Abweichungen zwischen mittlerer transformierter individueller PD und Ziel-PD für einige ausgewählte Konservativitätsaufschläge (in Prozent)

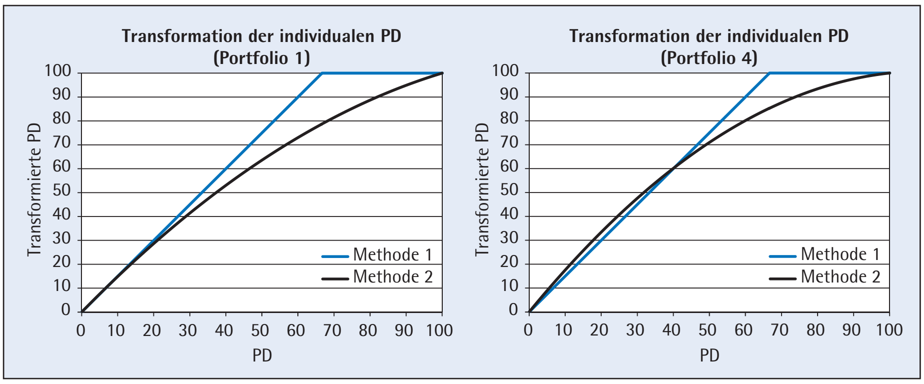
Konservativitätsaufschlag	Portfolio 1		Portfolio 2		Portfolio 3		Portfolio 4	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
5	0,00	- 0,03	0,00	- 0,03	0,00	- 0,03	0,00	- 0,01
10	0,00	- 0,05	0,00	- 0,06	0,00	- 0,06	- 0,01	- 0,02
20	0,00	- 0,09	0,00	- 0,11	- 0,01	- 0,12	- 0,14	- 0,04
30	0,00	- 0,13	- 0,02	- 0,15	- 0,04	- 0,16	- 0,46	- 0,06
50	0,00	- 0,18	- 0,08	- 0,21	- 0,17	- 0,24	- 1,75	- 0,08
100	- 0,08	- 0,27	- 0,55	- 0,32	- 1,20	- 0,36	- 7,86	- 0,10

Konservativitätsaufschlag für Testportfolio 2 entspricht einem absoluten Konservativitätsaufschlag von 0,6 Prozent, also einer Ziel-PD von 6,6 Prozent.

Um die Qualität der Methoden zu bewerten, wird nun für jeden Kunden in den Testportfolios die transformierte individuelle PD jeweils für die beiden Methoden errechnet, wobei die individuelle PD, die Portfolio-PD und verschiedene Ziel-PDs (die durch verschiedene Wahlen des Konservativitätsaufschlags bestimmt werden) ermittelt werden. Anschließend kann für beide Methoden jeweils der Mittelwert der transformierten individuellen PDs berechnet werden. Im Idealfall sollte dieser Mittelwert mit der vorgegebenen Ziel-PD übereinstimmen – die Höhe der Abweichung von dieser Ziel-PD erlaubt eine Aussage zu der Qualität der Methode im betrachteten Parameterbereich.

Abbildung 1 zeigt für die untersuchten Portfolios die relative Abweichung zwischen den gemittelten transformierten individuellen PDs und der Ziel-PD als Funktion der Konservativitätsaufschläge. Darüber hinaus sind für ausgewählte Konservativitätsaufschläge die Ergebnisse in der Tabelle zusammengefasst. Diese Zahlen sind beispielsweise folgendermaßen zu lesen: Für Testportfolio 4 (Portfolio-PD = 25 Prozent) wird ein Konservativitätsaufschlag

Abbildung 2: Transformation der individualen PDs bei einem Konservativitätsaufschlag von 50 Prozent



von 20 Prozent gewählt (entsprechend einer Ziel-PD von 30 Prozent). In diesem Fall ist der Mittelwert der transformierten individuellen PDs nach Methode 1 um 0,14 Prozent niedriger als 30 Prozent, also rund 29,96 Prozent, sodass der realisierte Konservativitätsaufschlag leicht geringer ausfällt als vorgegeben. Nach Methode 2 fällt der Mittelwert sogar nur um 0,04 Prozent niedriger aus. Beide Methoden liefern daher in diesem Parameterbereich recht genaue Ergebnisse.

Größere Unterschiede erst bei höheren PDs

Deutlich sichtbar ist, dass die Höhe der Abweichungen bei der Methode 2 nur geringfügig von der Ausfallrate der untersuchten Portfolios abhängt – die maximalen relativen Abweichungen von der vorgegebenen Ziel-PD bewegen sich im Bereich bis 0,3 bis 0,4 Prozent. Im Gegensatz hierzu steigen die relativen Abweichungen bei der Methode 1 mit zunehmender Portfolio-Ausfallquote und liegen für das Testportfolio 4 mit bis zu acht Prozent eine Größenordnung über den Abweichungen der Methode 2. Allerdings ist dieser Effekt lediglich bei hohen Ausfallquoten und hohen Konservativitätsaufschlägen sichtbar.

Auf den ersten Blick überraschend ist dagegen die Tatsache, dass die einfache Skalierungsmethode bei geringen Ausfallquoten und geringen Konservativitätsaufschlägen genauer ist als die methodisch anspruchsvollere Methode 2. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Methode 2 einen für die Transformation benötigten Parameter auf der Menge der ausgefallenen Kunden schätzen muss (siehe mathematischer Anhang) – diese Schätzung wird aber für niedrige Ausfallquoten und entsprechend geringe Stückzahlen ausgefallener Kunden ungenau. In diesem Fall erweist sich die Methode 1 daher als robuster.

Abbildung 2 zeigt die transformierte individuelle PD als Funktion der individuellen PD. Erwartungsgemäß zeigt die Grafik das nicht-lineare Verhalten der Transformationsformel in Methode 2 – während eine individuelle PD von vier Prozent auf sechs Prozent transformiert wird (Faktor 1,5), wird eine individuelle PD von 60 Prozent auf 73 Prozent transformiert (Faktor 1,2). Wenn sich die individuelle PD einem Wert von 100 Prozent nähert, nähert sich auch die transformierte individuelle PD einem Wert von 100 Prozent (Faktor 1). Dieses Verhalten entspricht der Erwartung, dass eine PD von 100 Prozent einem sicheren Ausfall entspricht, der sich auch bei einer Anpassung der Portfolio-PD nicht ändern sollte. Im Vergleich zu Methode 2 ist das lineare Verhalten der Methode 1 deutlich sichtbar. Für kleine PDs dagegen zeigt sich (wie auch aus der obigen Betrachtung der relativen Abweichungen zu erwarten ist), dass für kleine PDs die Unterschiede zwischen den beiden Methoden gering sind.

Methodenwahl nach Portfolio-Eigenschaften

In diesem Artikel werden zwei Methoden vorgestellt, die es erlauben, Konservativitätsaufschläge auf individuelle Kunden- beziehungsweise Vertrags-PDs zu berechnen. Die erste der beiden Methoden (Methode 1) ist eine einfache lineare Skalierung, die jede individuelle PD mit einem festen Faktor multipliziert. Die zweite Methode (Methode 2) ist methodisch anspruchsvoller – die mathematischen Hintergründe werden im Anhang dargestellt (siehe Homepage des Verlages – Red.). Beide Methoden werden auf vier Testportfolios hinsichtlich ihrer Eignung geprüft, durch Transformation der individuellen PDs eine vorgegebene Ziel-PD auf Portfolio-Ebene einzustellen. Hierbei zeigt sich, dass Methode 2 über alle Testportfolios und über den gesamten PD-Bereich hinweg Ergebnisse erzeugt, die in den betrachteten Beispielen um maximal etwa 0,4 Prozent von der vorgegebenen Ziel-Portfolio-PD abweichen.

Die Genauigkeit der Methode 1 dagegen hängt stark von dem betrachteten Portfolio ab – bei hohen Portfolio-PDs und/oder hohen Konservativitätsaufschlägen verliert die Methode 1 schnell an Genauigkeit. Trotzdem zeigt sich, dass in durchaus praxisrelevanten Situationen mit niedrigen PDs und moderaten Konservativitätsaufschlägen Methode 1 eine gute Näherung darstellt, die in diesen Fällen sogar der Methode 2 überlegen sein kann, da sie nicht – wie Methode 2 – darauf angewiesen ist, bestimmte Parameter numerisch auf der Menge ausgefallener Kunden zu bestimmen und dadurch für geringe Ausfallstückzahlen an Robustheit gewinnt. Folgende Handlungsempfehlungen lassen sich aus diesen Ergebnissen ableiten:

– Bei niedrigen Portfolio-PDs (bis etwa fünf Prozent) und moderaten Konservativitätsaufschlägen (bis etwa 50 Prozent) liefert Methode 1 genauere Ergebnisse als Methode 2 und ist zudem einfacher zu implementieren. Für diese Fälle ist die Verwendung der Methode 1 zu empfehlen.

– In allen anderen Fällen empfiehlt sich die Verwendung von Methode 2. Diese hat zudem den Vorteil, dass die relativen Abweichungen in den betrachteten Beispielen generell beschränkt sind (wohingegen Methode 1 in ungünstigen Konstellationen hoher Portfolio-PDs sehr ungenau wird), sodass sich Methode 2 auch als Lösung anbietet, wenn für eine Vielzahl von Portfolios eine einheitliche Transformationslogik aufgesetzt werden soll.

Hinweis

Der Beitrag **einschließlich einer mathematischen Herleitung von Methode 2** kann auf der Homepage des Verlages unter Eingabe der Autorennamen oder eines Schlagwortes kostenfrei abgerufen werden – unter www.kreditwesen.de

Anhang: Mathematische Ableitung der Formeln für Methode 2

Um die weitere Diskussion zu vereinfachen, vereinbaren wir in der Folge eine Reihe von Begrifflichkeiten und Notationen.

Die **individuellen PDs**, die sich implizit aus der Score-Entwicklung ergeben und zu korrigieren sind, bezeichnen wir mit

$$PD_i$$

wobei der Index *i* über die einzelnen Datensätze der Entwicklungsstichprobe läuft. Die Gesamtzahl der Datensätze bezeichnen wir mit n.

Aus diesen individuellen PDs ergibt sich eine **mittlere Portfolio-PD** von

$$\overline{PD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} PD_i$$

Unser Ausgangspunkt ist, dass eine angestrebte mittlere Portfolio-PD bekannt ist, auf die die individuellen PDs zu transformieren sind. Diese angestrebte mittlere Portfolio-PD nennen wir kurz **Ziel-PD** und bezeichnen sie mit

$$\overline{PD'}$$

Die (derzeit noch unbekannten) **transformierten individuellen PDs** seien

$$PD_i'$$

Die Gesamtzahl der beobachteten ausgefallenen Kunden in der Entwicklungsstichprobe bezeichnen wir mit N_D, die Zahl der nicht-ausgefallenen Kunden entsprechend mit N_A. Auf dem Portfolio, das sich im Rahmen unseres Gedankenexperiments ergibt (bei dem wir davon ausgehen, dass von den nicht-ausgefallenen Kunden eine gewisse Zahl als doch ausgefallen angesetzt wird, wobei diese Zahl so zu bemessen ist, dass die Ausfallquote auf diesem angepassten Portfolio gerade der Ziel-PD entspricht) nennen wir diese Größen entsprechend N_D' und N_A'. Wir nehmen an, dass die Score-Entwicklung jedem Kunden i jeweils einen Score s zuweist. Die Häufigkeitsverteilung des Scores auf der Entwicklungsstichprobe für die ausgefallenen Kunden sei $p_D(s)$, für die nicht-ausgefallenen Kunden $p_A(s)$. Analog bezeichnen wir die die Häufigkeitsverteilungen in unserem Gedankenexperiment mit $p_D'(s)$ und $p_A'(s)$.

Es gilt

$$\int ds\, p_D(s) = \int ds\, p_D'(s) = \int ds\, p_A(s) = \int ds\, p_A'(s) = \mathbf{1}$$

Wir betrachten ein Score-Intervall $[s, s+\Delta s]$, wobei Δs als klein angenommen wird. Innerhalb dieses Score-Intervalls liegen

$$n_D(s, s+\Delta s) = N_D \cdot \int_s^{s+\Delta s} ds'\, p_D(s')$$

ausgefallene Kunden. Für diese Berechnung werden die relativen Häufigkeiten der Score-Verteilung für die ausgefallenen Kunden über alle die Scores integriert, die in das vorgegebene Intervall $[s, s+\Delta s]$ fallen. Wählen wir Δs genügend klein, ist $p_D(s')$ über das Integrationsintervall nahezu konstant, und wir erhalten

$$n_D(s, s+\Delta s) = N_D \cdot p_D(s) \cdot \Delta s$$

Analog gilt für die nicht-ausgefallenen Kunden

$$n_A(s, s+\Delta s) = N_A \cdot p_A(s) \cdot \Delta s$$

Die dem Score s zuzuweisende PD können wir nun aus dem Quotienten der Anzahl ausgefallener Kunden und der Gesamtzahl der Kunden im Intervall $[s, s+\Delta s]$ berechnen:

$$PD(s) = \frac{n_D(s)}{n_D(s)+n_A(s)} = \frac{N_D \cdot p_D(s)}{N_D \cdot p_D(s) + N_A \cdot p_A(s)}$$

Dabei lässt sich der Quotient von N_A und N_D durch die mittlere Ausfallrate $\overline{AR}$ des Portfolios ausdrücken:

$$\overline{AR} = \frac{N_D}{N_D+N_A} \Leftrightarrow \frac{N_A}{N_D} = \frac{1-\overline{AR}}{\overline{AR}}$$

Es folgt

$$PD(s) = \frac{1}{1+\dfrac{1-\overline{AR}}{\overline{AR}} \cdot \dfrac{p_A(s)}{p_D(s)}}$$

und

$$\overline{PD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} PD_i = \int ds\, p(s) PD(s) = \overline{AR}$$

Unter unseren Annahmen ist also die mittlere Ausfallquote des ursprünglichen Portfolios gleich der mittleren PD des ursprünglichen Portfolios, wie es aus Konsistenzgründen auch zu erwarten ist.

Wir kommen nun zu dem Transformationsverhalten. Analog zu

$$PD(s) = \frac{n_D(s)}{n_D(s)+n_A(s)} = \frac{N_D \cdot p_D(s)}{N_D \cdot p_D(s) + N_A \cdot p_A(s)}$$

gilt nach der Transformation

$$PD'(s) = \frac{n'_D(s)}{n'_D(s)+n'_A(s)} = \frac{N'_D \cdot p'_D(s)}{N'_D \cdot p'_D(s) + N'_A \cdot p'_A(s)}$$

Wegen

$$N = N_D + N_A = N'_D + N'_A$$

können wir schreiben

$$N'_D = N_D + \Delta N$$
$$N'_A = N_A - \Delta N$$

Da wir Konservativitätsaufschläge betrachten, gilt $\Delta N > 0$ (Erhöhung der Portfolio-PD durch die Transformation).

In diesem Fall setzen wir an

$$n'_D(s) = n_D(s) + \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\} \cdot n_A(s)$$

Diesem Ansatz liegt die Überlegung zugrunde, dass die Zahl der in einem (genügend klein gewählten) Score-Intervall $[s, s+\Delta s]$ bei Erhöhung der Portfolio-Ausfallrate zusätzlich ausfallenden Kunden proportional zu der Zahl der bisher nicht-ausgefallenen Kunden in diesem Intervall $n_A(s)$ und auch proportional zu der Ausfallwahrscheinlichkeit der Kunden in diesem Score-Intervall $PD(s)$ ist. Die verbleibende score-unabhängige Proportionalitätskonstante nennen wir α. Dabei ist die Zahl der Kunden, die in dem Score-Intervall zusätzlich ausfallen kann, nach oben durch die Zahl der nicht-ausgefallenen Kunden in diesem Score-Intervall beschränkt. In anderen Worten: Der zweite Summand in unserer Transformationsformel darf maximal gleich $n_A(s)$ sein. Dies wird durch die Minimum-Funktion erzwungen.

Da sich die Zahl der nicht-ausgefallenen Kunden um denselben Betrag verringern muss, um den die Zahl der ausgefallenen Kunden im selben Score-Intervall steigt, gilt analog

$$n'_A(s) = n_A(s) - \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\} \cdot n_A(s)$$

Es stellt sich die Frage, wie der Proportionalitätsfaktor α zu bestimmen ist. Hierzu integrieren wir die Transformationsformel für die ausgefallenen Kunden über den gesamten Score-Bereich und erhalten

$$\int ds\, n'_D(s) = \int ds\, n_D(s) + \int ds \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\} \cdot n_A(s)$$

$$\Leftrightarrow N'_D = N_D + \int ds \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\} \cdot n_A(s)$$

Wegen $N'_D = N_D + \Delta N$ folgt

$$\Delta N = N \cdot (\overline{PD}' - \overline{PD}) = \int ds \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\} \cdot n_A(s)$$

Aus dieser Gleichung kann der Wert von α bestimmt werden, wobei das folgende Argument zeigt, dass eine entsprechende Lösung existiert und eindeutig ist: Die rechte Seite ist eine streng monotone Funktion von α. Für $\alpha \to 0$ geht die rechte Seite gegen 0 und ist kleiner als ΔN. Für $\alpha \to \infty$ geht die rechte Seite gegen N_A. Da ΔN nach oben durch N_A beschränkt ist, ist die rechte Seite in diesem Fall größer oder gleich ΔN. Schließen wir den Extremfall $\Delta N = N_A$ aus, der eintritt, wenn als Ziel-PD 100% gewählt werden und der daher nicht praxisrelevant ist, folgt hieraus, dass die Gleichung eine eindeutige Lösung in α besitzt mit $0 < \alpha < \infty$. Diese Lösung kann mit numerischen Standardmethoden für ein gegebenes Transformationsproblem bestimmt werden.

Mit bekanntem α setzen wir unsere Transformationsformeln für $n'_D(s)$ und $n'_A(s)$ in

$$PD'(s) = \frac{n'_D(s)}{n'_D(s) + n'_A(s)}$$

ein und erhalten **für $\overline{PD}' > \overline{PD}$ (Erhöhung der Portfolio-PD durch die Transformation)**

$$PD'(s) = PD(s) + (1 - PD(s)) \cdot \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\}$$

wobei α aus der Gleichung

$$N \cdot (\overline{PD}' - \overline{PD}) = \int ds \min\{1, \alpha \cdot PD(s)\} \cdot n_A(s)$$

numerisch zu bestimmen ist.