

## Copulas im Risikomanagement

Modellierung von Abhängigkeiten in der Bankpraxis: Bei verschiedenen finanzwirtschaftlichen Fragestellungen ist die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren eines Portfolios eine zentrale Herausforderung.<sup>1)</sup> Als aktuell sehr bedeutende Anforderung ist die Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils nach AT 4.1 MaRisk hervorzuheben. Hier sind die verschiedenen Risikoarten (insbesondere Marktpreisrisiken, Adressrisiken, Liquiditätsrisiken und operationelle Risiken) zum Gesamtrisiko des Kreditinstituts zu aggregieren, beziehungsweise es ist als differenziertere Information die Verteilung der möglichen Werte der Gesamtbank bezogen auf einen Risikohorizont zu ermitteln.

### Zusammenführung der einzelnen Risikowerte

Mit der Quantifizierung des Gesamtrisiko-Profils ist somit die zentrale Frage der geeigneten Zusammenführung der einzelnen Risikowerte verbunden, zum Beispiel des CVaR des Kreditbuches (Haltedauer üblicherweise ein Jahr, Konfidenzniveau zum Beispiel 99,5 Prozent) mit dem VaR des Zinsbuchs (Haltedauer zum Beispiel drei Monate, Konfidenzniveau zum Beispiel 95 Prozent). Alternativ können direkt die Chancen-Risiko-Verteilungen je Risikoart zusammengeführt werden.<sup>2)</sup> Neben der einheitlichen Skalierung der Haltedauer sowie des Konfidenzniveaus ist zu klären, wie Korrelationen beziehungsweise allgemeine Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risikoarten Berücksichtigung finden können: Bei einer bloßen Addition von VaR-Werten (wie aktuell in der Bankpraxis bisweilen als „Lösungsansatz“ beobachtbar) blieben die Diversifikationspotenziale zwischen den Risikokategorien unberücksichtigt. Neben der Ableitung des Gesamtbankrisikoprofils kann man als weitere wichtige Beispiele nennen:

– **Ermittlung des Gesamtbankrisikos im Rahmen der strategischen Asset-Allokation:** Bei der strategischen Asset-Allokation wird ein Optimierungsproblem gelöst, bei dem die Zielfunktion in der Regel eine Ertrags-Risiko-Relation ist. Die Ermittlung des Gesamtbankrisikos im Rahmen des Optimierungsproblems ist methodisch analog zur Fragestellung der Ermittlung des Gesamtbankprofils.

– **Ermittlung der Adressrisikoverteilung und des Credit-Value-at-Risk (CVaR):** Jedes CVaR-Modell hat als Hauptbestandteil ein Korrelationsmodell, bei dem simultan Risikofaktoren simuliert werden, um das systematische Risiko im Adressrisikoportfolio zu modellieren.

– **Ermittlung der Modellpreise von CDO-Tranchen:** Während die obigen Fragen die

Risikomessung betreffen, ist eine Preisermittlung für Kreditderivate eine Bewertungsfrage. Jedoch liegen diesen Instrumenten Portfolios zugrunde, so dass die Adressrisikoverteilung des zugrunde liegenden Portfolios (Underlying) und deren Entwicklung im Zeitverlauf in die Bewertung integriert werden muss.<sup>3)</sup>

### Aggregation von Verteilungen mittels Faltung und Limitationen

Im nächsten Abschnitt wird zunächst auf die Thematik der Aggregation von einzelnen Verteilungen zu einer Gesamtverteilung eingegangen. Im anschließenden Abschnitt wird dann explizit auf die Copula-Funktionen eingegangen, die die „Spielregeln“ für die Modellierung der Abhängigkeit zwischen den Verteilungen sind.

Das Basisverfahren zur Aggregation von Verteilungen zu einer Gesamtverteilung wird in der Mathematik als Faltung bezeichnet. Die Bedeutung der einzelnen Verteilung ist zum Verständnis des Verfahrens irrelevant. Die einzelnen Verteilungen können zum Beispiel die Randverteilungen der Risikoarten (Adressrisiko, Marktpreisrisiko, ...) oder aber einzelner Kreditnehmer oder Emittenten im Rahmen eines CVaR-Modells sein.

Die Grundidee der Faltung zeigt das folgende Beispiel. Gegeben seien die Häufigkeitsverteilungen für die Risikoarten X (zum Beispiel Zinsänderungsrisiko) und Y (zum Beispiel Aktienkursrisiko)<sup>4)</sup>. Die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt der entsprechenden Wertänderungen seien PX, PY (Abbildung 1).

Bildet man nun alle gemeinsam möglichen Kombinationen, (zum Beispiel den Eintritt von  $X = 0$  und  $Y = -2$ ) so erhält man Abbil-

*Dr. Andreas Beck, geschäftsführender Partner, IC Nova GmbH, Dr. Michael Lesko, Leiter des Bereichs Bankinnovation, Mitglied der Geschäftsleitung, und Dr. Frank Schlottmann, Senior Management Consultant, alle GILLARDON AG financial software, Bretten, Prof. Dr. Konrad Wimmer, Leiter des Bereichs Business Center Finance, msg systems ag, Ismaning/München*

*Aus Sicht der Autoren sind die statistisch-mathematischen Verfahren der Copula-Funktionen gegenwärtig dabei, sich zum State of the Art zur Berücksichtigung der Abhängigkeiten bei der modernen Aggregation von Risiken zu entwickeln. Sie verweisen auf zahlreiche Anwendungen in der Bankpraxis wie die Ermittlung des Gesamtbankrisikos (siehe auch Kreditwesen 13-2006) oder die Bewertung von Basket-Kreditderivaten. Der Beitrag gibt eine Übersicht der Grundideen von Copula-Funktionen und erläutert deren verschiedene Arten mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen. (Red.)*

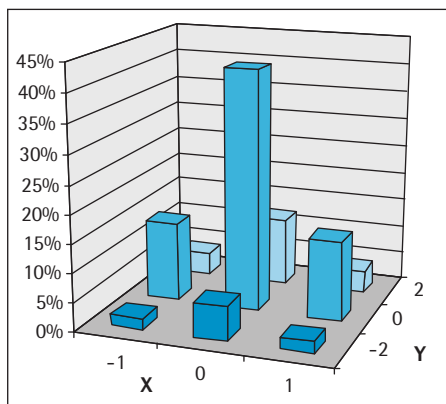
**Abbildung 1: Häufigkeitsverteilungen für Risikoarten X und Y**

X	PX	Y	PY
-1	20%	-2	10%
0	60%	0	70%
1	20%	2	20%
Summe	100%	Summe	100%

**Abbildung 2: Gemeinsame Eintrittshäufigkeiten für Wertänderungen je Risikoart**

X	Y	-1	0	1
-2		2%	6%	2%
0		14%	42%	14%
2		4%	12%	14%

**Abbildung 3: Gemeinsame Häufigkeitsverteilung für die Wertänderungen je Risikoart**



dung 2. Graphisch resultiert ein Gebirge (Abbildung 3).

Zur Ermittlung der eigentlich gewünschten Verteilung der Wertkonsequenzen müssen alle Wertkombinationen zur Zielgröße Z ( $Z = X + Y$ ) addiert werden. Bei der Faltung werden die Koordinaten der Paare addiert und im Fall, dass verschiedene Kombinationen zum selben Summenwert führen (zum Beispiel  $2 = 0 + 2$  und  $2 = 2 + 0$ ), aufsummiert (Abbildung 4).

Betrachtet man das obige Beispiel, wäre mit der Faltung eine einfache Methode gefunden, die es ermöglicht einzelne Randverteilungen zu einer Gesamtverteilung zusammenzuführen. Eine Grenze des Verfahrens ist, dass es nur im Fall der Unabhängigkeit angewendet werden kann. Des Weiteren stößt das kombinatorische Auswerten im Falle von Verteilungen mit vielen Stützstellen (dies ist im Fall der

Verteilungen für Adressrisiken oder Marktpreisrisiken gegeben) und bei gleichzeitigem Vorliegen von mehreren Risikoarten (zum Beispiel zehn Assetklassen in der strategischen Asset-Allokation) schnell an kombinatorische Grenzen.

**Ausweg: Simulationsbasierte Copula-Modelle**

In der Praxis wird das Aggregationsproblem in folgenden vier Schritten gelöst.

**Schritt 1 – Simulation gleichverteilter Zufallszahlen (Eigentliches Copula-Modell):** Es werden mittels einer Monte-Carlo-Simulation je Szenario (zum Beispiel 20 000) abhängige, gleichverteilte Zufallszahlen für alle Risikoarten (zum Beispiel Zins- und Adressrisiko) generiert.

**Schritt 2 – Quantil-Mapping<sup>5)</sup> (Randverteilungen):** Es erfolgt ein Abgleich der jeweiligen gleichverteilten Zufallszahl mit dem zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörigen Quantil (= Wertänderung) der jeweiligen Randverteilung.

**Schritt 3 – Addition der Ergebnisse (Gesamtbankrisiko):** Je Simulationsszenario werden die Simulationsergebnisse je Risikoart addiert.

**Schritt 4: Auswertung der Gesamtverteilung:** Es wird die Häufigkeitsverteilung für die Gesamtbank auf Basis aller Szenarien ermittelt.

Auf Schritt 1 und die Copula-Funktionen als Grundlage der Abhängigkeitsmodellie-

rung wird erst im nächsten Abschnitt eingegangen. An dieser Stelle wird der Vorgang einfach als das Werfen von abhängigen Konfidenzniveaus für die Risikoarten aufgefasst. Die Abbildung 5 illustriert das Quantil-Mapping aus Schritt 2.

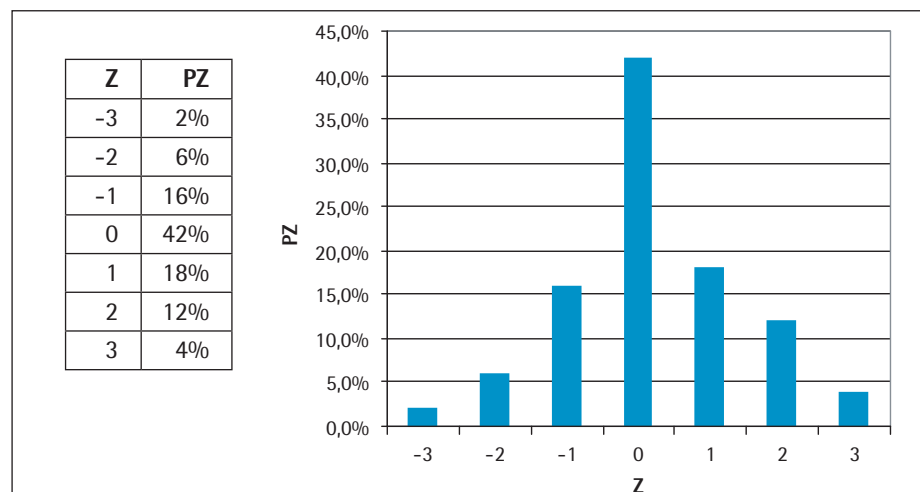
Beim Quantil-Mapping wird die in Schritt 1 geworfene abhängige Zufallszahl (Konfidenzniveau) mit dem Konfidenzniveau der zugehörigen Randverteilungen verglichen. Im Beispiel wird als 21 Prozent-Konfidenzniveau ein Verlust von 0,8 Euro ermittelt. In Schritt 3 werden je Szenario zufällige Wertänderungen erzeugt und addiert, um die gesamte Wertänderung des Portfolios zu ermitteln. In Schritt 4 wird die Häufigkeitsverteilung anhand der simulierten Szenarien ausgewertet. Die Schritte 2 bis 4 haben nichts mit der im folgenden Kapitel erläuterten Copula-Funktion selbst zu tun.

**Copula-Funktionen – Definition und Logik**

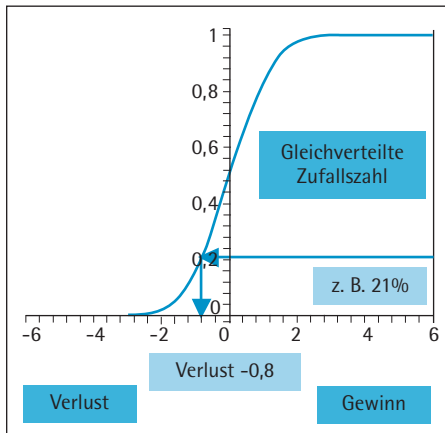
Eine Copula-Funktion beschreibt die funktionale Abhängigkeit zwischen verschiedenen Zufallsvariablen, die durch (Rand-)Verteilungen repräsentiert werden. Der Ansatz der Copula-Funktion wurde 1959 von Sklar, A. in der Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt.

Formal sind Copula-Funktionen multivariate Verteilungsfunktionen, deren Randverteilungen gleichverteilt sind.<sup>6)</sup> Mittels Copula-Funktionen können beliebig verteilte Zufallsvariablen mit beliebigen Abhängigkeitsstrukturen zu neuen gemeinsa-

**Abbildung 4: Gemeinsame Häufigkeitsverteilung – Ergebnis der Faltung**



**Abbildung 5: Quantil-Mapping**



men Verteilungsfunktionen verknüpft werden (Abbildung 6).

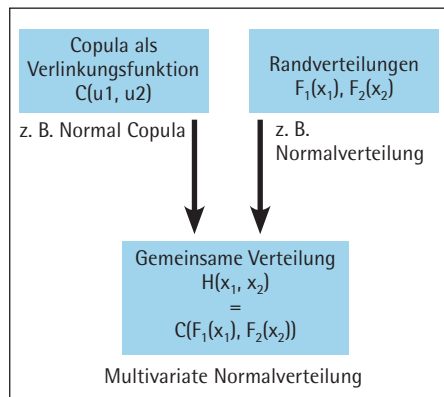
**Nutzen und Arten von Copula-Funktionen**

Nutzen im Hinblick auf Aggregation von Risiken sind:<sup>7)</sup>

- Risikoarten/Risikofaktoren müssen im Hinblick auf die Aggregation nicht als normalverteilt angenommen werden. Es sind beliebige Verteilungen zulässig.
- Die Abhängigkeit zwischen den Risikoarten/Risikofaktoren muss nicht mittels linearer Abhängigkeit abgebildet werden.

Anzumerken ist, dass die Technik der Copula-Funktionen zwar bereits seit geraumer Zeit in den Kreditrisikomodellen angewendet wird und dort etabliert ist, dies

**Abbildung 6: Zusammenfügen von Randverteilungen und Copula**



aber wohl nur den Fachspezialisten bewusst war. So liegt sowohl in Credit-Metrics<sup>8)</sup> als auch in CPV Direkt eine so genannte Gauß- oder Normal-Copula zur Modellierung der Korrelationen zugrunde.

Es gibt zwei Hauptklassen von Copula-Funktionen. Zum einen die elliptischen Copula-Funktionen. Zu diesen zählen die zurzeit in der Praxis am meisten genannten Copula-Funktionen, die Normal- oder Gauß-Copula und die t- oder Student-Copula. Beides sind so genannte implizite Copula-Funktionen, da es keine einfache geschlossene Form für diese Copulas gibt.

Die andere Klasse von Copulas, die so genannten archimedischen Copulas, werden in der bankpraktischen Literatur gegenwärtig noch kaum betrachtet. Im Gegensatz zu den elliptischen Copulas können mit ihnen auch asymmetrische Abhängig-

keiten in den Rändern der Verteilungen abgebildet werden.

**Normal-Copula:** Die Simulation der abhängigen gleichverteilten Zufallszahlen für Schritt 1 mit der Normal-Copula erfolgt unter Anwendung einer Umwandlung in korrelierte standardnormalverteilte Zufallszahlen mittels der Cholesky-Faktorisierung und anschließender Rücktransformation. Die Abbildung 7 illustriert die Transformationsschritte der Normal-Copula.

**t-Copula:** Mittels der t- oder Student-Copula-Funktion gelingt es, stärkere Abhängigkeiten zwischen extremen Ereignissen abzubilden. Somit können gemeinsame starke Marktbewegungen in Realität besser als durch die Normal-Copula erfasst werden. Wie die Normal-Copula weist auch die t-Copula ein symmetrisches Abhängigkeitsverhalten auf.<sup>9)</sup> Die t-Copula hat zusätzlich zur Korrelation einen weiteren Parameter, den so genannten Freiheitsgrad. Die Abbildung 8 illustriert den Effekt der Teilabhängigkeit bei mittels Normal- und t-Copula simulierten Zufallszahlen.

Die Simulation der abhängigen gleichverteilten Zufallszahlen für Schritt 1 mit der Student-Copula kann nicht analog erfolgen, es muss eine zusätzliche Transformation unter Verwendung von Chi-Quadratverteilten Zufallszahlen erfolgen.

**Clayton-Copula:** Die Abbildung 9 illustriert die Simulation abhängiger gleichverteilter Zufallszahlen, die mit der archimedischen Clayton-Copula simuliert wurden. Die erste Grafik zeigt die Clayton-Copula.

**Abbildung 7: Normal-Copula**

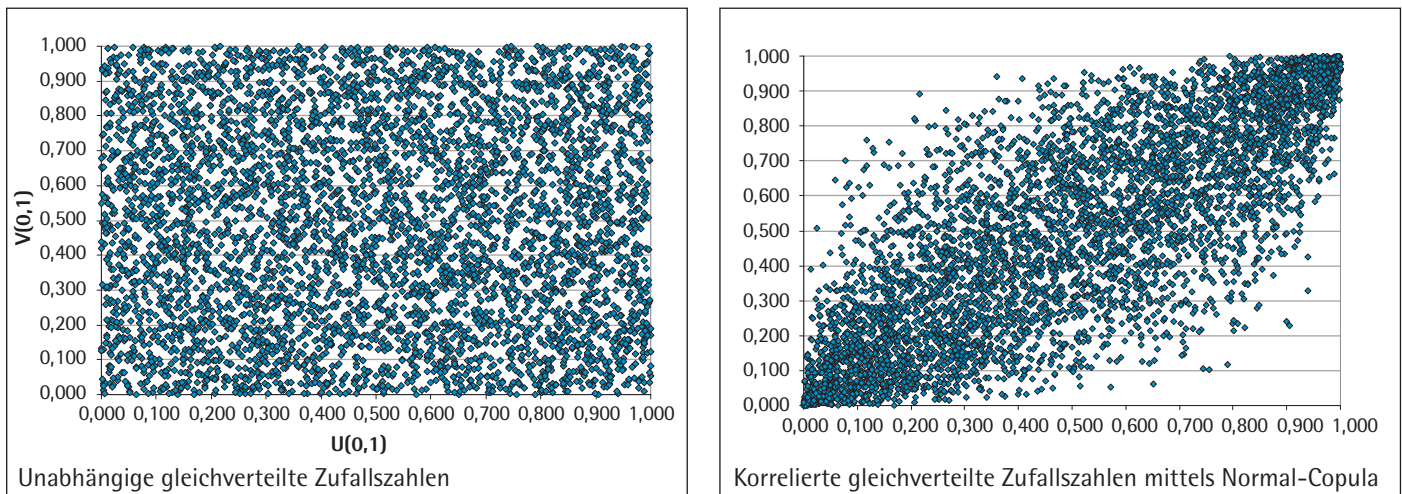
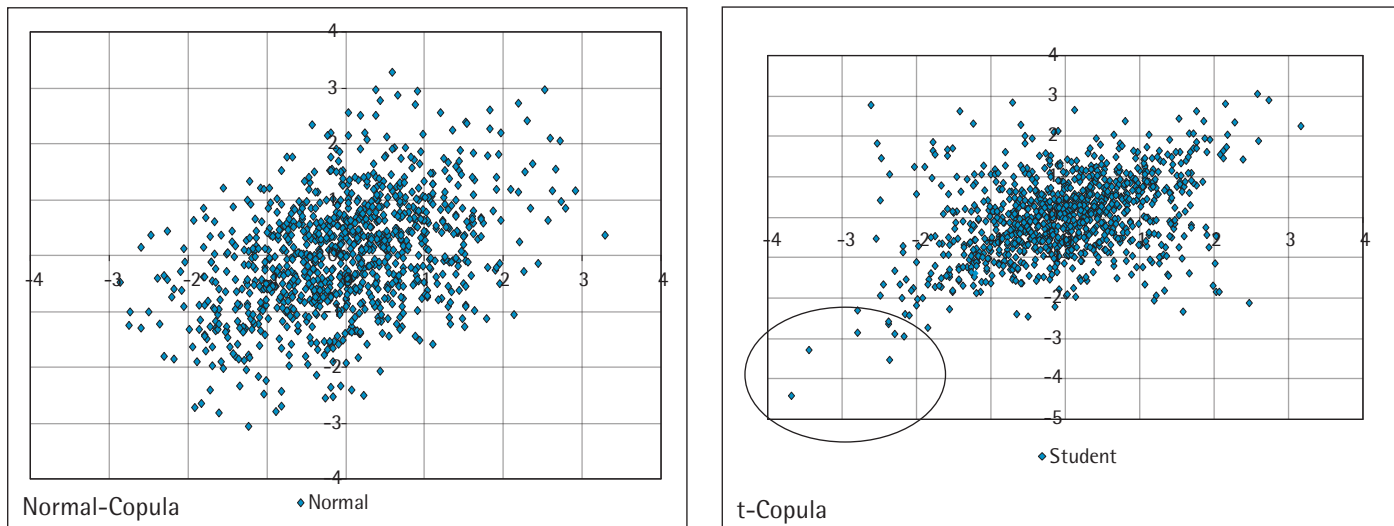


Abbildung 8: Normal- versus t-Copula



Im Gegensatz zur Normal- und t-Copula können auch asymmetrische Abhängigkeiten zwischen den Rändern abgebildet werden. Dies ist dann relevant, wenn Chancen und Risiken in der Realität nicht symmetrisch eintreten. Ausführungen zur Simulation von archimedischen Copulas finden sich in Cherubini et al., 2004.

Auswahl der Copula und Schätzung der Parameter: Aufgrund der Datenverfügbarkeit gilt es, sich gegenwärtig sowohl mit Fragen der Auswahl der geeigneten Copula wie auch mit der Schätzung der Parameter (zum Beispiel Maximum Likelihood Methoden) für die jeweilige Copula auseinander zu setzen. So ist für die Normal-Copula die Korrelationsmatrix und für die t-Copula zusätzlich der Freiheitsgrad zu schätzen. Im Hinblick auf die Auswahl der Copula

existieren unterschiedliche statistische Verfahren. Für Details zu den Fragestellungen sei auf das Buch von Cherubini et al verwiesen.

Heuristisch kann man sich im zweidimensionalen Fall bezüglich der Auswahl der Copula zum Beispiel am empirischen Plot orientieren, um Rückschlüsse auf Teilabhängigkeiten oder Asymmetrie zu ziehen.

**Beispiel Gesamtbankrisiko**

Eine zentrale Anwendungsmöglichkeit der Copula-Funktionen ist die Ermittlung des Gesamtbankrisikos, das zum Beispiel im Rahmen der Risikotragfähigkeitsanalysen der MaRisk wie auch bei der strategischen Asset-Allokation benötigt wird. Gegenwärtig wird hierfür häufig das Verfahren der

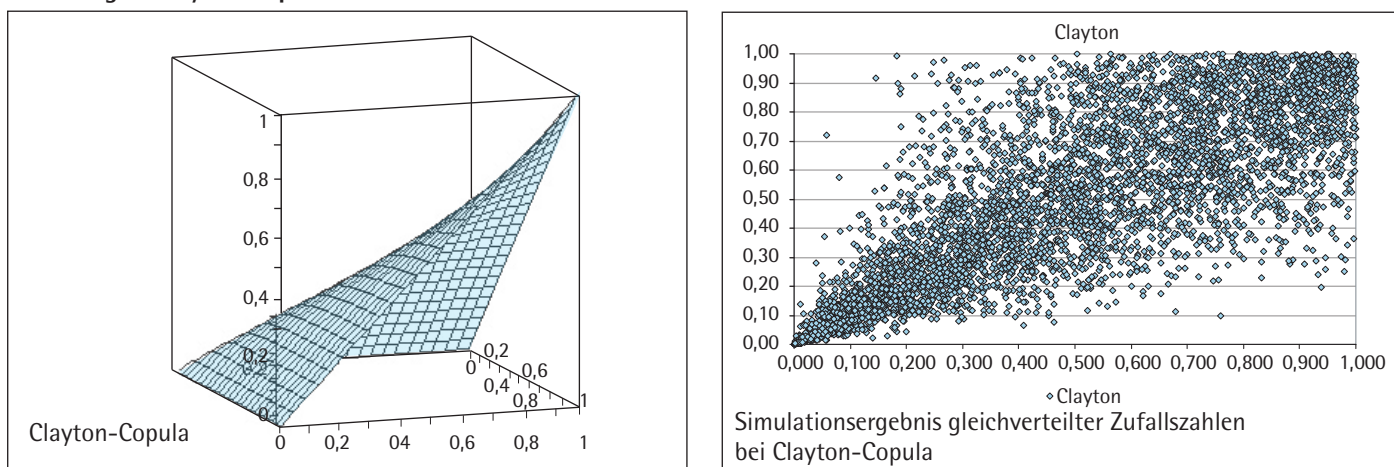
korrelierten Addition angewandt, das auf Normalverteilungsannahmen beruht. Beispielhaft wurde für eine fiktive Bank die Marktpreisrisiko- und die Adressrisiko-Chancen-Risiko-Verteilung mittels verschiedener Verfahren im Hinblick auf das Gesamtrisiko zum Konfidenzniveau 99,5 Prozent analysiert.

Verglichen wurden die Ergebnisse für eine Korrelation von 30 Prozent von

- Faltung (keine Korrelation),
- Korrelierte Addition,
- Normal-Copula,
- Student-Copula.

Die Ergebnisse für den VaR (negative Abweichung von der Erwartung) sind in der folgenden Abbildung 11 dargestellt.

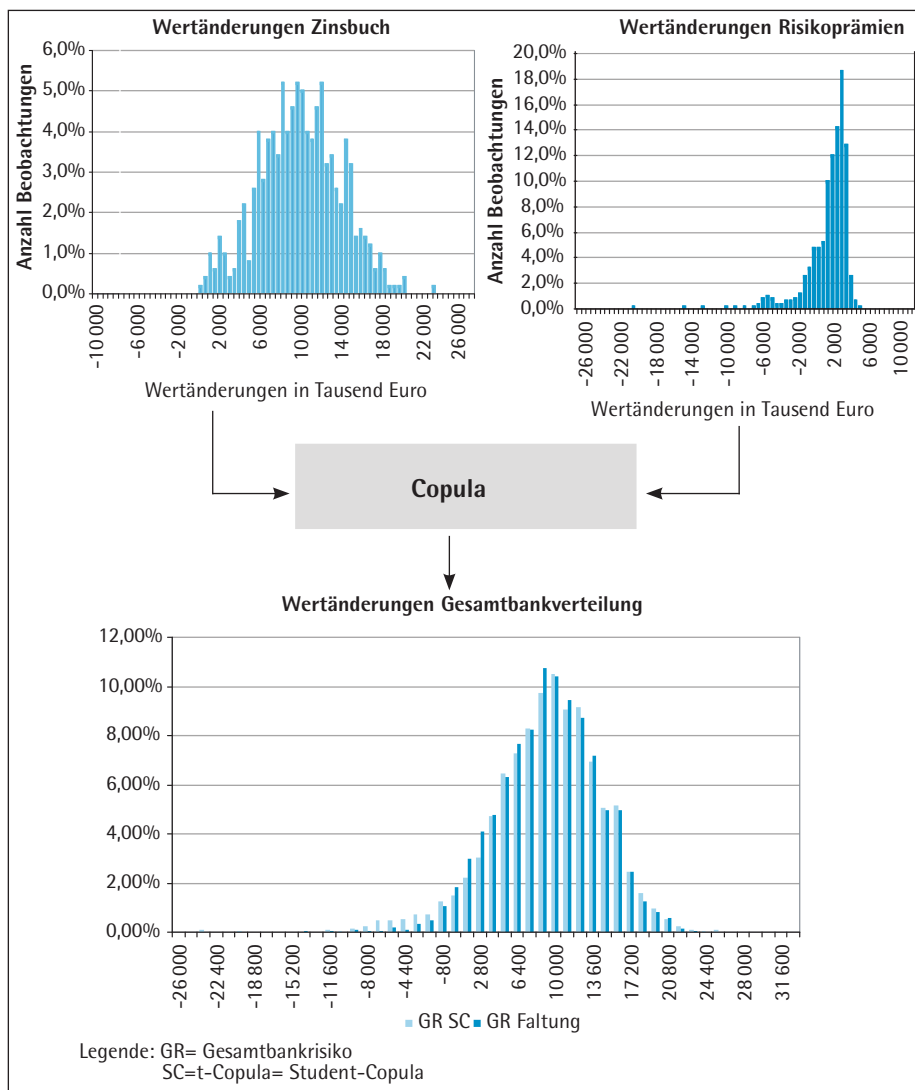
Abbildung 9: Clayton-Copula







**Abbildung 10: Aggregation von Marktpreis- und Adressrisikoverteilung zum Gesamtbankprofil**



Da die Faltung keine Abhängigkeit berücksichtigt, wird das Gesamtrisiko unterschätzt. Die korrelierte Addition ist nicht in der Lage die Schiefe der Verteilungen adäquat abzubilden. Dies wird durch Anwendung der Normal-Copula erreicht. Das Ergebnis der Student-Copula ist höher, da durch sie eine stärkere Teilabhängigkeit modelliert wird.

Copula-Funktionen sind gegenwärtig dabei, sich zum Standardverfahren zur Ag-

gregation von Risiken zu entwickeln. Der einfachste Weg hierbei ist sicher, zunächst die Normal-Copula anzuwenden. Diese bietet gegenüber dem Noch-Standard-Verfahren der korrelierten Addition bei der Gesamtbankrisikoaggregation den Vorteil, bei gleicher und bereits verfügbarer Inputanforderung (Randverteilung und Korrelation zwischen den Risikoarten) bessere Ergebnisse zu liefern. Der Einsatz der Copula-Funktionen ist trotz sicherlich noch

bestehenden Forschungsbedarfs (etwa im Hinblick auf die Wahl der „richtigen“ Copula und der Parameterschätzung) gerechtfertigt. Bei der Kreditrisikomodellierung sind diese Techniken bereits State-of-the-Art.

#### Literatur

- Beck, A., Lesko, M., Moderne Ansätze zur Messung von Ertrag und Risiko der Gesamtbank in: Pfeifer/Ullrich/Wimmer (Hrsg.): MaRisk Umsetzungsleitfaden, Heidelberg 2006.
- Beck, A., Lesko, M., Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 05/2006, Seiten 289 bis 293.
- Böcker, K./Spielberg, H., Risikoaggregation mit Copulas, in: Die Bank 08/2005, Seiten 56 bis 59.
- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W.: Copula Methods in Finance, Wiley, 2004.
- Kiesel, R./Lesko, M./Prestele, C., Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen, Handbuch Verbriefungen und Kreditderivate, Poeschel, 2005, Seiten 313 bis 329.
- Lesko, M./Vorgriemler, S.: Monte-Carlo-Techniken bei modernen Kreditrisikomodeln – ein Beispiel, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 21/1999.
- Li, D.X.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, 9, pp 43-54, 2000.
- Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- O. V., Rundschreiben 18/2005, Mindestanforderungen an das Risikomanagement.

#### Fußnoten

- <sup>1)</sup> Vgl. Beck, A., Lesko, M., Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 05/2006, Seiten 289 bis 293.
- <sup>2)</sup> Bezüglich Schwächen des Risikomaßes VaR, zum Beispiel der fehlenden Subadditivität sei verwiesen auf Beck, A., Lesko, M., Moderne Ansätze zur Messung von Ertrag und Risiko der Gesamtbank in: Pfeifer/Ullrich/Wimmer (Hrsg.): MaRisk Umsetzungsleitfaden, Heidelberg 2006, Seite 511.
- <sup>3)</sup> Kiesel, R./Lesko, M./Prestele, C., Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen, in: Gruber, W. et al. Handbuch Kreditderivate und Verbriefungen, Poeschel, 2005, Seiten 313 bis 329.
- <sup>4)</sup> Formal handelt es sich bei den Randverteilungen im Beispiel um die Wahrscheinlichkeitsfunktionen diskreter Zufallsvariablen. Inhaltlich beschreiben diese die Eintrittshäufigkeiten bestimmter Wertänderungen.
- <sup>5)</sup> Durch diesen Schritt können beliebige Randverteilungen zusammengefasst werden.
- <sup>6)</sup> Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- <sup>7)</sup> Böcker, K./Spielberg, H., Risikoaggregation mit Copulas, in: Die Bank 08/2005, Seiten 56 bis 59.
- <sup>8)</sup> Lesko, M./Vorgriemler, S.: Monte-Carlo-Techniken bei modernen Kreditrisikomodeln – ein Beispiel, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 21/1999 und Li, D.X.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, pp 43-54, 2000.
- <sup>9)</sup> Es gibt auch unterschiedliche Copulas, die asymmetrisches Verhalten aufweisen, diese Copulas sind vor allem dann relevant, wenn Chancen und Risiken in der Realität nicht symmetrisch eintreten.

**Abbildung 11: Ergebnisvergleich der unterschiedlichen Methoden**

Kennzahl	Faltung	Korrelierte Addition	Normal-Copula	Student-Copula (Freiheitsgrad 3)
VaR 99,5 Prozent in Tausend Euro	14 313	15 582	16 239	17 612